

# 整除性

## 用 Lagrange 的方法判定一個數能否被 7 整除

2011年 8月 23日

J.L.Lagrange 是法國著名數學家 3 L 的其中一個 L，寫過不少有關高等數學的論文。但是他也寫過 5 篇給一般讀者的文章，輯錄在 "Lectures on Elementary Mathematics" 一書內，其中討論有關加、減、乘、除等等的大眾數學。當中亦有討論到 7 的整除性判別方法，方法如下：

1. 將原來的數字寫在上排，
2. 重複使用 1, 3, 2, 6, 4, 5 這幾個數字，由右至左寫在第二排，使得兩排有同樣的多個數字
3. 將相同位置的數字乘起來然後求和
4. 若容易看得出上述的這個和是否能被 7 整除則停止,否則重複 (1) - (4)。

例(1): 判定 12345 能否被 7 整除

1. 將 12345 寫在上排
2. 將 46231 寫在下排
3. 求積然後求和得  $5 \times 1 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 6 + 4 \times 1 = 5 + 12 + 6 + 12 + 4 = 39$
4. 顯然 39 不是 7 的倍數，可以得知 12345 不能被 7 整除。更且知道 12345 被 7 除餘 4。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ 4 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 4 \quad 12 \quad 6 \quad 12 \quad 5 \end{array}$$

例(2): 判定 14935823 能否被 7 整除

1. 將 14935823 寫在上排
2. 從 31546231 寫在下排
3. 求積然後求和得  $3 + 4 + 45 + 12 + 30 + 16 + 6 + 3 = 119$
4. 將 119 寫在上排
5. 從 231 寫在下排
6. 求積然後求和得  $2 + 3 + 9 = 14$
7. 顯然 14 能被 7 整除，所以可以得知 14935823 能被 7 整除。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 4 \quad 45 \quad 12 \quad 30 \quad 16 \quad 6 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 9 \\ 2 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 9 \end{array}$$

分析:

1. 1 被 7 除餘 1
2. 10 被 7 除餘 3
3. 100 被 7 除餘 2 (亦可以由 30 被 7 除，得餘數 2)

4. 1000 被 7 除餘 6 (亦可以由 20 被 7 除, 得餘數 6)
5. 10000 被 7 除餘 4 (亦可以由 60 被 7 除, 得餘數 4)
6. 100000 被 7 除餘 5 (亦可以由 40 被 7 除, 得餘數 5)
7. 1000000 被 7 除餘 1 (亦可以由 40 被 7 除, 得餘數 1)
8. 餘數再不斷的循環下去
9. 是以

$$\begin{aligned}12345 &= 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1 \\ &= 1 \times (7x + 4) + 2 \times (7y + 6) + 3 \times (7z + 2) + 4 \times (7w + 3) + 5 \times 1\end{aligned}$$

10. 12345 被 7 除, 得餘數  $1 \times 4 + 2 \times 6 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 1 = 39 = 7 \times 5 + 4$
11. 12345 被 7 除, 得餘數 4

延伸:

1. 你可以用相同的方法, 設計其他數字的整除性之判定方法嗎?