# 重階乘 Double Factorial

Double Factorial一詞並不是一個普及的數學名詞，因爲偶爾看見這個詞彙，追查之後，發現筆者大多的辭典、百科全書、參考書籍皆沒有提及，惟仍覺得這個數學符號在某些場合，有其令數學表達更簡潔的功能，是以收錄。

Double Factorial 又稱作 Semi-factorial，今暫譯作重階乘(「重」是指相重) 或半階乘，亦有書稱爲階乘的階乘，筆者意爲階乘的階乘會令人有誤解爲「由階乘計算得的數，再計算這個數的階乘」，若沒有更多資料支持，會避用階乘的階乘，待筆者找到更多參巧，本頁會再更改。

對于正整數，常見的數學符號階乘(Factorial) 「!」可如下使用

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times 3 \times 2 \times 1$$

又定義 $0! = 1$，$n!$ 稱爲 n階乘(n Factorial)。

## 定義(一)

對于正整數$n$，定義

$$n!! = \begin{cases} n \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 1 & \text{，} n \text{ 爲奇數} \\ n \times (n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 & \text{，} n \text{ 爲偶數} \end{cases}$$

又定義 $0!! = 1$，$n!!$ 稱爲重階乘(Double Factorial)。

**例：**

$$7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1$$
$$8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2$$

## 性質

**性質(1)** 若 $n \geq 1$，又添一定義 $(-1)!! = 1$

$$n!! = n \times (n-2)!!$$

**性質(2)** $n!! \times (n-1)!! = n!$

**性質(3)** $n!! = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!!}$

**性質(4)** $(2n)!! = 2^n \times n!$

**性質(5)** $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$

## 證明

### 性質(1)

1. 若 $n$ 爲奇數，$(n-2)$ 亦爲奇數
   (a) $n!! = n \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 1$
   (b) $n!! = n \times (n-2)!!$

2. 若 $n$ 爲偶數，$(n-2)$ 亦爲偶數
   (a) $n!! = n \times (n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$
   (b) $n!! = n \times (n-2)!!$

**性質(2)**

1. 若 $n$ 爲奇數，$(n-1)$ 爲偶數
   (a) $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$
   (b) $n! = n\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times3\times1$
   $\times(n-1)\times(n-3)\times\cdots\times4\times2$
   (c) $n! = n!!\times(n-1)!!$

2. 若 $n$ 爲偶數，$(n-1)$ 爲奇數
   (a) $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$
   (b) $n! = n\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times4\times2$
   $\times(n-1)\times(n-3)\times\cdots\times3\times1$
   (c) $n! = n!!\times(n-1)!!$

**性質(3)**

1. 由性質(2)，$n! = n!!\times(n-1)!!$；
2. $n!! = \dfrac{n!}{(n-1)!!}$
3. $n!! = \dfrac{(n+1)\times n!}{(n+1)\times(n-1)!!}$
4. $n!! = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!!}$

**性質(4)**

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times6\times4\times2\\ &= 2\times n\times2\times(n-1)\times2\times(n-2)\times\cdots\times2\times3\times2\times2\times2\times1\\ &= 2^n\times n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1\\ &= 2^n\times n!\end{aligned}$$

**性質(5)**

1. 由性質(3)，$(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{(2n)!!}$
2. 由性質(4)，$(2n)!! = 2^n\times n!$
3. $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n\times n!}$

## 定義(二)

由性質(1)，$n!! = n\times(n-2)!!$，有

$$\begin{aligned}(n-2)!! &= \frac{n!!}{n}\\ n!! &= \frac{(n+2)!!}{n+2}\end{aligned}$$

再添加定義 $(-1)!! = 1$，可以將重階乘的概念拓展到負奇數。

**例：**

$$(-3)!! = \frac{(-1)!!}{-1} = -1 = -\frac{1}{1!!}$$

$$(-5)!! = \frac{(-3)!!}{-3} = -\frac{1}{1!!}\times\frac{1}{-3} = \frac{1}{3!!}$$

$$(-7)!! = \frac{(-5)!!}{-5} = \frac{1}{3!!}\times\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5!!}$$

$$(-9)!! = \frac{(-7)!!}{-7} = -\frac{1}{5!!}\times\frac{1}{-7} = \frac{1}{7!!}$$

$$(-11)!! = \frac{(-9)!!}{-9} = \frac{1}{7!!}\times\frac{1}{-9} = -\frac{1}{9!!}$$

$$(-13)!! = \frac{(-11)!!}{-11} = -\frac{1}{9!!}\times\frac{1}{-11} = \frac{1}{11!!}$$

**性質(6)**

對于奇數 $n$，

$$(-n)!! \times n!! = (-1)^{(n-1)/2} \times n$$

## 應用

**例**

對于 $|x| \le 1$，$\sqrt{1 \pm x}$ 有如下的冪級展開式：

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^5 - \cdots$$

用重階乘，$\sqrt{1 \pm x}$ 有如下的冪級展開式：

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2!!}x - \frac{1}{4!!}x^2 - \frac{3!!}{6!!}x^3 - \frac{5!!}{8!!}x^4 - \frac{7!}{10!!}x^5 - \cdots - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n - \cdots$$

## 參考資料


1. 數學百科全書第一卷(A-C).科學出版社,1994(P.713)
2. 谷超豪.數學詞典.上海辭書出版社,1992(P.15)
3. R.Courant,H.Robbins.What is Mathematics.OUP,1996(P.88)
4. G.H.Hardy.A Course of Pure Mathematics.Cambridge University Press,1921(P.81)