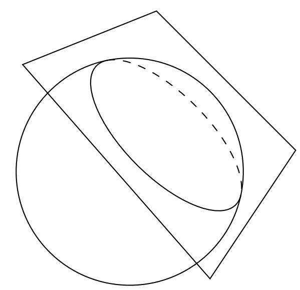
由兩個城市的經緯度求距離

若城市 A、B 的經緯度分別爲 (θ_1, ϕ_1) 和 (θ_2, ϕ_2)，R 爲地球的半徑，則

$$\text{城市 A、B 的距離爲：} R\cos^{-1}\left(\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\sin\phi_1\phi_2\right)$$

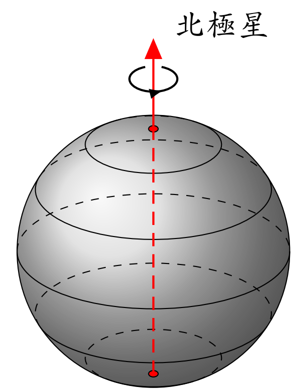
大圓、球面上兩點的最短距離

過球心的平面和球面的交線稱爲「大圓」(Great Circle)。



1. 若一個平面與一個球半徑爲 R 的圓球相交，得到的交線會是一個半徑爲 r 的圓，其中 $0 \le r \le R$。
2. 若 $r = R$, 這個圓稱爲大圓 (great circle)，其它圓則稱爲小圓 (small circle)。
3. 過球心的平面與圓球的交線是一個大圓。

球面上兩點的最小距離爲經過兩點的大圓的劣弧。
航海與航空中利用這一原理而設置大圓航線。



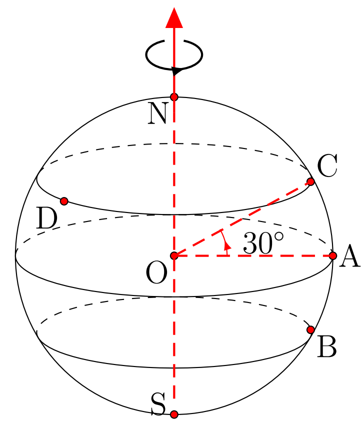
赤道

- 雖然，地球並不是一個球體，但它非常近似於一個球體，所以，一般都會將地球簡單地視作一個圓球來討論。這個球的半徑爲 6371 km。
- 地球有自轉，它繞著過球心的一條線旋轉，這條線指向遙遠的一顆星，稱爲「北極星」。球面與旋轉軸(地軸）的兩交點分別爲北極和南極。
- 在球面上的任何一點，繞旋轉軸轉一周，會得出一個圓。如此得到的圓有無限多個，惟當中有一個是最大的圓，這個圓稱爲赤道(Equator)。赤道所在的平面，與旋轉軸交於地心。
- 赤道是地球上的一個大圓。是過球心、與地軸垂直的平面與地球的交線。

地理坐標系、緯度

- 要表示地球表面一點的位置，常用的是地理坐標系（Geographic Coordinate System），以經緯度來表示一點的位置。例如：香港的經緯度爲東經 114.1880°，北緯 22.2670°。

- 以 30° 爲例，赤道上任選一點 A，在過 A、O、N 的平面上的大圓，取一點 C，使得 $\angle AOC = 30°$，若將 C 繞地軸轉一周，會得出一個圓。這個圓就是北緯30° 的緯線(Line of Latitude)。而 C 點的緯度就是北緯30°。在同一緯線上的任一點之「緯度」是相同的。在北緯30° 的緯線上的任一點，其緯度都是北緯30°。圖中的 D 點，其緯度亦是北緯 30°。



- 同樣，向南極方向以 30° 取得的一點 B，亦可得南緯30° 的一條緯線。

- 以同樣的方法，可作出北半球上不同緯度(latitude) $x°$ 的緯線(其中 $0 \leq x \leq 90$)。

- 同樣，亦可作出南半球上不同緯度的緯線。

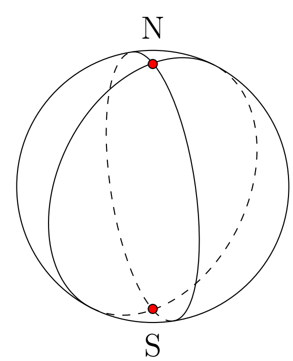
- 因爲香港的經緯度爲東經 114.1880°，北緯 22.2670°，所以由香港至地心的球半徑與赤道平面之夾角爲22.2670°。

- 顯然，除 90° 外，球面上有相同緯度的點有無限多個。北極的緯度爲北緯 90°，南極的緯度爲南緯 90°，赤道就是 0° 的緯線。

- 除赤道外，地球上所有緯線都是小圓。

子午線、本初子午線、經線、經度

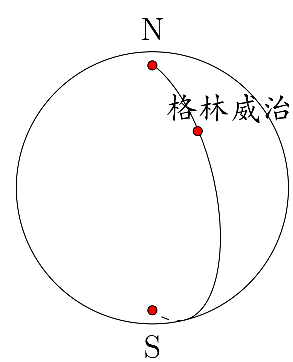
- 因爲地心是地軸的中點。如上述，過地軸的平面與球面的交線都是大圓，且地軸爲這些大圓的直徑。北極(N)和南極(S)將大圓分成兩個大圓弧(半圓)，這些半圓，我們稱之爲子午線(meridian)。



- 如右圖，共有兩個過兩極的大圓，和 4 條子午線。

- 除兩極外，球面的任何一點都在一條子午線上。如平面坐標一樣，我們可以用一點所在的緯線和子午線來給定一點的位置。

- 因爲緯線能夠以赤道(0°)和北極(90°)爲參考，所以便能定義出緯線屬南屬北和它的緯度。惟子午線則沒有一個「天然」的參考點。是以初始的時候，各國皆各自定出一條子午線爲參考點。



- 於 1884 年 10月 23 日，各國在華盛頓召開的國際會議上，議定將經過倫敦格林威治皇家天文台（Royal Observatory, Greenwich）子午儀中心的一條子午線，定爲參考線，稱爲本初子午線(Prime Merdian)。

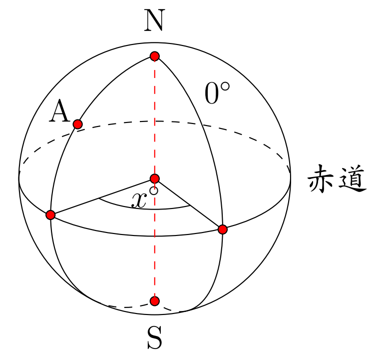
- 本初子午線的大圓將地球分爲兩半，本初子午線往東的半球稱爲東半球，往西的稱爲西半球。本初子午線稱爲有經度(Longitude)爲 0° 的經線(Line of Longitude)。

- 於 1953年，格林威治天文台往東移約 100 米，現今的格林威治天文台已不在本初子午線上。

- 本初子午線的訂定，除了位置外，亦由此定立國際間時間的參考，稱格林威治天文台的時間爲格林威治標準時間(Greenwich Mean Time，GMT)。

- 如圖，若要求 A 點的經度，只需求得過 A 點經線所在的平面與 0° 經線所在的平面之間的夾角 $x^\circ(0 < x \leq 180)$ 便可，因爲 A 點位於 0° 經線以西，A 點的經度爲西經 x°

- 香港的經緯度爲 $22.2670^\circ N$, $114.1880^\circ E$，（習慣上，先寫緯度，後寫經度），換句話說，香港在本初子午線以東 114.1880°，因地球需 24 小自轉一周（360°），所以香港的零晨零時比格林威治的零晨零時早 8 $(= 114.18/360 \times 24 \approx 8)$小時，並以 GMT+8 來表示。如若某場足球賽是於英國 3 月 4 日 19:45 上演，因爲香港的時間比英國多走 8 小時，所以，開賽的時間爲香港的 3 月 5 日 3:45 $(19 + 8 - 24 = 3)$。



空間坐標與地理坐標

- 地理坐標系查實是一個局限在地球表面的一個曲面上的坐標系，用兩個數量便可表示出一點的所在位置，惟這一點必須在這球面上。

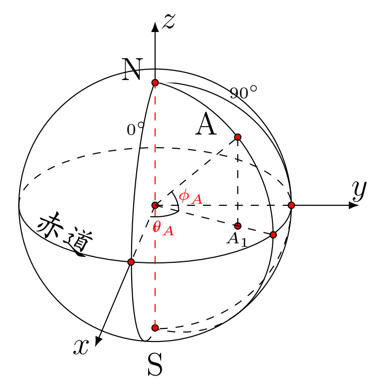
- 地球作爲一個球體，若需表示一點(球內、球上、球外)的位置，得需用到空間坐標系了。

- 直角坐標系是常用的一個空間坐標系。在三維空間，須用三個數量來表示一點的位置；除直角坐標系外，常用的還有圓柱坐標系和球坐標系。

- 計算時不再用「東經」、「北緯」來描述在地球表面一點的所在位置，而簡單地以 θ 來表示在本初子午線以東 θ 的「緯線」上的一點，而以 $+\phi$ 表示在北緯 ϕ 的一點、以 $-\phi$ 來表示在南緯 ϕ 的一點。

- 取地心 O 到赤道與本初子午線交點爲直角坐標系的 x 軸，地心到赤道與「東經」90° 爲直角坐標系的 y 軸，地心到「北極」爲 z 軸;

- 設 A 點的經緯度爲 (θ_A, ϕ_A)，A 到 xy 平面上的投影爲 A_1；



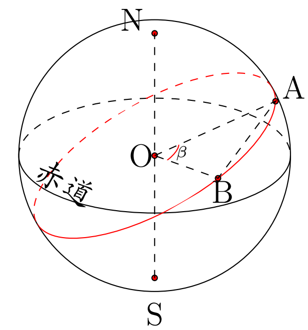
- A_1 在 xy 平面上的坐標爲 $(OA_1 \cos\theta_A, OA_1 \sin\theta_A)$；

- $AA_1 = R\sin\phi_A$，$OA_1 = R\cos\phi_A$，其中 $R = OA$ 爲地球半徑；

- 由此，在三維空間，A 點的坐標爲 $(OA_1 \cos\theta_A, OA_1 \sin\theta_A, AA_1)$，即 $(R\cos\phi_A \cos\theta_A, R\cos\phi_A \sin\theta_A, R\sin\phi_A)$；

- 同理，若 B 點的經緯度爲 (θ_B, ϕ_B)，B 點的坐標爲 $(R\cos\phi_B \cos\theta_B, R\cos\phi_B \sin\theta_B, R\sin\phi_B)$。

地球球面上兩點的最短距離



- 設 A、B 點的經緯度分別爲 (θ_A,ϕ_A)、(θ_B,ϕ_B)，地球半徑 R，$OA=OB=R$；
- 兩點 A、B 在地球球面上的最短距離爲 OAB 所在平面的大圓的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$；設 $\angle AOB=\beta$，$\overset{\frown}{AB}=R\beta$；
- 因爲 A 點的坐標爲 $(R\cos\phi_A\cos\theta_A, R\cos\phi_A\sin\theta_A, R\sin\phi_A)$，$B$ 點的坐標爲 $(R\cos\phi_B\cos\theta_B, R\cos\phi_B\sin\theta_B, R\sin\phi_B)$；
- 直線 AB 的距離爲:
  $\sqrt{(R\cos\phi_A\cos\theta_A-R\cos\phi_B\cos\theta_B)^2+(R\cos\phi_A\sin\theta_A-R\cos\phi_B\sin\theta_B)^2+(R\sin\phi_A-R\sin\phi_B)^2}$
- $$\begin{aligned}AB^2 &= R^2(\cos^2\phi_A\cos^2\theta_A-2\cos\phi_A\cos\theta_A\cos\phi_B\cos\theta_B+\cos^2\phi_B\cos^2\theta_B)\\ &\quad +R^2(\cos^2\phi_A\sin^2\theta_A-2\cos\phi_A\cos\phi_B\sin\theta_A\sin\theta_B+\cos^2\phi_B\sin^2\theta_B)\\ &\quad +R^2(\sin^2\phi_A-2\sin\phi_A\sin\phi_B+\sin^2\phi_B)\\ &= R^2(\cos^2\phi_A-2\cos\phi_A\cos\phi_B(\cos\theta_A\cos\theta_B+\sin\theta_A\sin\theta_B)+\cos^2\phi_B)\\ &\quad +R^2(\sin^2\phi_A-2\sin\phi_A\sin\phi_B+\sin^2\phi_B)\\ &= R^2\Big(2-2\cos\phi_A\cos\phi_B\cos(\theta_A-\theta_B)-2\sin\phi_A\sin\phi_B\Big)\end{aligned}$$
- 由 $\triangle AOB$，$\cos\beta=\dfrac{R^2+R^2-AB^2}{2R^2}=\dfrac{R^2+R^2-R^2\Big(2-2\cos\phi_A\cos\phi_B\cos(\theta_A-\theta_B)-2\sin\phi_A\sin\phi_B\Big)}{2R^2}$
- $\cos\beta=\cos\phi_A\cos\phi_B\cos(\theta_A-\theta_B)+\sin\phi_A\sin\phi_B$，其中 $\pi\geq\beta>0$
- 劣弧 $\overset{\frown}{AB}=R\beta=R\cos^{-1}\Big(\cos\phi_A\cos\phi_B\cos(\theta_A-\theta_B)+\sin\phi_A\sin\phi_B\Big)$，其中，$cos^{-1}m$ 以弧度表示。

示例：香港與幾個地方的距離

- 地球半徑，R ：6371 km
- 香港⇔北京 ：1968 km
- 香港⇔拉薩 ：2397 km
- 香港⇔澳洲悉尼：7549 km
- 香港⇔牙買加 ：15350 km

	經度(θ)	緯度(ϕ)
香港	$114°12'$E $+114.2°$	$22°18'$N $+22.3°$
北京	$116°24'$E $+116.40°$	$39°54'$N $+39.90°$
拉薩	91°6‘E $+91.10°$	$29°39'$N $+29.65°$
澳洲悉尼	$151°13'$E $+151.22°$	35°52‘S $-35.87°$
牙買加	77.30°W $-77.30°$	18.11°N $+18.11°$

參考資料

1. T.G.Feeman.Portraits of the Earth-A Mathematician Looks at Maps.AMS,2002(P.27)