複數 Complex Number

複數是指形如 $x+yi$ 的數 z，其中 x、y 爲實數，i 爲滿足 $i^2=-1$ 或 $i=\sqrt{-1}$ 的虛數單位(imaginary unit)。

若 $z=x+yi$，其中 x、y 爲實數，

1. x 稱爲 z 的實部(real part)，記作 $x=\text{Re } z$；
2. y 稱爲 z 的虛部(imaginary part)，記作 $y=\text{Im } z$；
3. 實數可以視爲虛部等于 0 的複數；
4. 亦有將虛部不等于 0 的複數稱爲虛數(imaginary numbers)。

複數在代數學中，地位超然，複數具以下兩個重要性質：

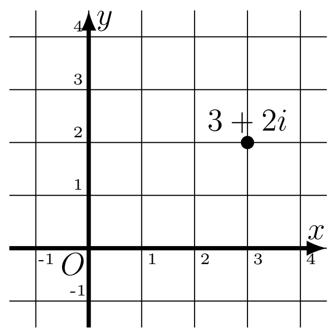
1. 任何以複數爲系數的 n $(n \geq 1)$ 次多項式都能分解成線式因式的乘積；
2. d'Alembert-Gauss 定理或代數基本定理：
   任何複數系數的 n $(n \geq 1)$ 次多項式至少有一個爲複數的根。

複數基本運算

若 a、b、c、d 皆爲爲實數(往下從略)，

1. $a+bi=c+di$ 若且爲若 $a=c$、$b=d$
2. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$、$\text{Re}(z_1+z_2)=\text{Re } z_1+\text{Re } z_2$、$\text{Im}(z_1+z_2)=\text{Im } z_1+\text{Im } z_2$
3. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
4. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，複數的乘法可如下來理解：
   $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$
5. $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$
6. $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

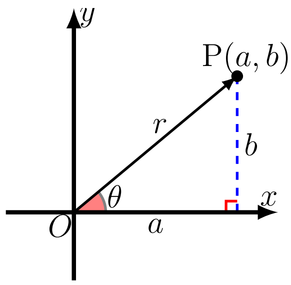
複平面[1]



1. 因 $a+bi=c+di$ 若且爲若 $a=c$、$b=d$，可以將 $z=a+bi$ 表示爲序偶(ordered pair) (a,b)，因而可以將複數表爲平面上的點，這個平面稱爲複平面(complex plane)。
2. 因 x 軸上的點皆形如 $(a,0)$，表示的 $a+0i$ 皆爲實數，故稱 x 軸爲實軸(real axis)；
3. 又 y 軸上的點皆形如 $(0,a)$，表示的 $0+bi$ 皆爲純虛數(pure imaginary number)，故稱 y 軸爲虛軸(imaginary axis)；

[1] 複平面亦稱爲 Argand 圖(Argand Diagram)，J.R.Argand(1768-1822)生于瑞士日內瓦，卒于法國巴黎。

複數的三角形式(Trigonometric Form)或極形式(Polar Form)



1. 若 $z = a + bi$，z 可以表爲複平面上的一點 $P(a, b)$，更可以極坐標來表示這一點；
2. 以 O 爲極點，射線 Ox 爲極軸，OP 的長度 r 爲這一點的極徑，OP 和極軸正向的夾角(按反時針方向由極軸到 OP 的角) θ 爲極角，有
   (a) $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$，$r$ 稱爲 z 的模(modulus) 或絕對值，記作 $|\,z\,|$；
   (b) $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$，$\theta$ 稱爲 z 的輻角(argument，亦作「幅角」)，由此 $a = r\cos\theta$、$b = r\sin\theta$，$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$；
   (c) 因 $\cos\theta = \cos(n \times 360^\circ + \theta)$、$\sin\theta = \sin(n \times 360^\circ + \theta)$，因而非零複數的輻角 θ 可取無限多個值，各值相差 2π 的整數倍，記作 $\arg z$，並稱 $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的輻角 θ 爲輻角的主值(Principal Value)，記作 $\mathrm{Arg}\ z$。

複數三角形式下的乘除法

若 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$、$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，

1. $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{(r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{(\cos\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$
   有 $|z_1 \times z_2| = r_1 \times r_2 = |z_1| \times |z_2|$、$\arg(z_1 \times z_2) = \arg\ z_1 + \arg\ z_2 \pm n \times 360^\circ$
2. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\right\} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right\} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\} \end{aligned}$$
   有 $|z_1 \div z_2| = r_1 \div r_2 = |z_1| \div |z_2|$、$\arg(z_1 \div z_2) = \arg\ z_1 - \arg\ z_2 \pm n \times 360^\circ$

參考資料

1. 數學百科全書第一卷(A-C).科學出版社,1994(P.713)
2. 谷超豪.數學詞典.上海辭書出版社,1992(P.15)
3. R.Courant,H.Robbins.What is Mathematics.OUP,1996(P.88)
4. G.H.Hardy.A Course of Pure Mathematics.Cambridge University Press,1921(P.81)