黃金分割與黃金比簡介

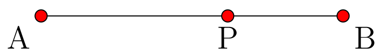
$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\phi = 0.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576\ 28621\ 35448\ 62270\ 52604$
$62818\ 90244\ 97072\ 07204\ 18939\ 11374\ 84754\ 08807\ 53868\ 91752\ 12663\ 38622\ 23536\ 93179$
$31800\ 60766\ 72635\ 44333\ 89086\ 59593\ 95829\ 05638\ 32266\ 13199\ 28290\ 2679\cdots$

黃金分割與黃金比

黃金分割 (golden section)

將給定的線段(圖中的 AB)，分爲兩段，使其中的一段(圖中的 AP)是全段(AB)與其餘的一段(PB)的 **等比中項**[1]，即



$$AB : AP = AP : PB$$

這樣的分割稱爲 **黃金分割** 。

- 設 $AB = a,\ AP = x,\ PB = a - x$
- 由 $AB : AP = AP : PB, \quad AP^2 = AB \times PB, \quad x^2 = a(a-x)$
- $x^2 + ax - a^2 = 0, \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a$ 捨去負值，得 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$；
- $AP = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$。

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\ 39887\cdots$ 稱爲 **黃金比** (golden ratio)或 **黃金分割數** 。

0.618? 1.618?

- 因爲 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，$AB : AP = a : x = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} \times \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$
$$AB : AP = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$
- 是故亦有人定義黃金比例爲 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$
- 爲分別這兩個數值，一般會以小草 ϕ 來表示 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$，
  而以大楷 Φ 來表示 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$

[1]若 $a : x = x : b$，則稱 b 爲 a、b 的 比例中項 (mean proportion)。

黃金分割簡史

1. 亦有稱將一段線段進行黃金分割爲「將線段分成 中末比 、 中外比 或 外內比 」。
2. 對「中末比」系統的研究，最早是古希臘數學家歐多克索斯(Eudoxus,公元前 408年～前 355年)。因爲畢達哥拉斯學派對五邊形邊形的著迷，畢達哥拉斯(Pythagoras, 約公元前 580年～約前 500年)可能已知道中末比的一些性質。
3. 中世紀以後，中末比被披上神秘的外衣，意大利數學家帕喬利(Luca Paccioli,1445∼1517)稱之爲「神聖比例」(Divine Proportion)；天文學家開普勒(Kepler,1571∼1630)稱之爲「神聖分割」，在開普勒與他的學生 Michael Maestlin 談及中末比時，有以下的一段話：

   > Geometry has two great treasures: one is the theorem of Pythagoras, the other the division of a line into extreme and mean ratio. The first we may compare to a mass of gold, the second we may call a precious jewel.
   > 畢氏定理和中末比是幾何學中的兩件珍寶，前者好比黃金，後者有如珠玉。

4. Simon Jacob(1510∼1564)注意到兩個相鄰的斐波那契數的比收斂于中末比，開普勒于 1608年亦發現到斐波那契數列與中末比的關係。
5. 中末比的嚴格論述最早見于歐幾理得(Euclid,約公元前 300年～前 400年)的《原本》。卷 2 第 11 題、卷 4 第 10 題、卷 6 第 30 題、卷 13 第 9 題，討論到正五邊形、正十邊形和中末比的關係。
6. 《原本》在卷 6 的定義 3，首先定義了「中末比」如下：

   > A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole is to the greater segment, so is the greater to the less.(Heath 譯本)
   >
   > 將一直線分成兩段，當整個直線比大段如同大段比小段時，則稱此直線被分成「中外比」。 (張卜天譯本)
   >
   > 一條線段按「中外比」進行分割，是指將這條線段分成兩段，其中整體線段和較長線段的比與較長線段和較短線段的比相同。(李彩菊譯本)

7. 利瑪竇(Matteo Ricci,1552∼1610)和徐光啓(1562∼1633)于 1607 年合譯了《原本》的前 6 卷，並在《原本》前冠以「幾何」二字，是以稱爲《幾何原本》，《幾何原本》的「卷六第三界」(即卷六定義三，利、徐將「定義」譯作「界説」)譯作：

   > 「 理分中末線 」者一線兩分之其全與大分之比例若大分與小分之比例。

   是以「黃金比」除譯作「中外比」外，亦譯作「中末比」。

參考資料

1. 陳雪、黎渝.奧妙無窮的共黃金分割.人民郵電出版社,2016.
2. 中國大百科全書:數學.中國大百科全書出版社,1994(P.306)
3. T.L.Heath(譯).The Thirteen Books of Euclid's Elements.Vol 2.Book III-IX.CUP,1908.
4. 張卜天(譯).幾何原本.商務印書館,2020.
5. 李彩菊(譯).幾何原本.北京理工大學出版社,2017.
6. 《四庫全書幾何原本》利瑪竇、徐光啓譯本(https://mathsgreat.com/elements/elements.html)
7. Golden Ratio(https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio)